

TD EM3

SF1

d'étude des symétries et invariants donnent $\vec{E}(r) = E(r) \vec{u}_r$

Par ailleurs, on a l'équation de Maxwell-Gauss : $\text{div } \vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} & \text{si } r < R \\ 0 & \text{si } r > R \end{cases}$

Or, ayant $\vec{E}(r) = E(r) \vec{u}_r$, on a $\text{div } \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 E)}{dr}$

Considérons dans un premier temps $r < R$:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 E)}{dr} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \quad \text{ie} \quad d(r^2 E) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} r^2 dr$$

On intègre entre $r=0$ et r : $r^2 E(r) - 0^2 E(0) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{3} r^3 - \frac{1}{3} 0 \right)$

$$E(r) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r$$

Si maintenant on considère $r > R$: $\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 E)}{dr} = 0$

ie $r^2 E(r) = \text{cte}$, or $E(R) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} R$

$$\text{Donc } R^2 \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} R = \text{cte} \quad \text{et} \quad E(r) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0 r^2} R^3$$

on retrouve bien les résultats du cours de EN1 ☺

SF2

d'équation de Maxwell-Gauss nous donne $\rho = \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}$.

Donc • $x > a$ et $x < -a$ $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{dE}{dx} = 0$ et $\rho = 0$

• $x \in [-a; a]$ $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{dE}{dx} = \frac{E_0}{a}$ et $\rho = \epsilon_0 \frac{E_0}{a}$.

Exercice 2 - Pince ampèremétrique

1) On se place dans un repère cylindrique $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$

le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie pour la distribution de courant.

$$\text{On a donc } \vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_\theta$$

Par ailleurs, on a invariance de la distribution par rotation autour de l'axe $(O, \vec{u}_z)$. Donc

$$\underline{\vec{B}(M) = B(r, z) \vec{u}_\theta}$$

Considérons Γ le cercle de centre H (projeté de M sur l'axe $(O, \vec{u}_z)$) de rayon r , de normale $+\vec{u}_z$.

$$\text{On a } \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r, z) 2\pi r$$

$$\text{et } I_{\text{enlacé}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \Gamma \notin \text{intérieur du tore} \\ NI & \text{si } \Gamma \in \text{intérieur du tore} \end{cases}$$

On a donc, par le théorème d'Ampère:

$$B(r, z) 2\pi r = \begin{cases} 0 & \text{si } r \notin \text{tore} \\ \mu_0 NI & \text{si } r \in \text{tore.} \end{cases}$$

En final

$$\boxed{\vec{B}(M) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } M \notin \text{tore} \\ \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \vec{u}_\theta & \text{si } M \in \text{tore.} \end{cases}}$$

2) On a $\Phi_{1\text{spire}} = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint \vec{B} \cdot dS \vec{u}_0$ ↙ par la règle de la main droite

$$= \mu_0 \frac{NI}{2\pi} \iint \frac{1}{r} dr dz$$

$$= \mu_0 \frac{NI}{2\pi} a \left[\ln r \right]_{b-a/2}^{b+a/2}$$

$$\boxed{\Phi_{1\text{spire}} = \mu_0 \frac{NI}{2\pi} a \ln \left(\frac{b+a/2}{b-a/2} \right)}$$

et au final $\Phi_{\text{tot}} = N \Phi_{1\text{spire}} = \mu_0 \frac{N^2 I}{2\pi} a \ln \left(\frac{b+a/2}{b-a/2} \right)$

3) Le champ $\vec{B}_{\text{fil}}$ créé par le fil sur l'axe (Oz) est

$$\vec{B}_{\text{fil}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{u}_0$$

On a donc

$$\Phi_{1\text{spire fil}} = \iint_{\text{spire}} \vec{B}_{\text{fil}} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \iint \frac{1}{r} dr dz$$

$$= \frac{\mu_0 i}{2\pi} a \ln \left(\frac{b+a/2}{b-a/2} \right)$$

Donc $\Phi_{\text{tot fil}} = N \Phi_{1\text{spire fil}} = \frac{\mu_0 N}{2\pi} i a \ln \left(\frac{b+a/2}{b-a/2} \right)$

On constate que $\Phi_{\text{tot fil}} = \frac{i}{I} \times \frac{1}{N} \Phi_{\text{tot}}$

4) Si on a deux circuits traversés par les courants i_1 et i_2

Φ_{112} étant le flux du champ créé par le circuit 1 à travers le circuit 2

et Φ_{211} réciproquement.

On a par définition $\phi_{112} = M i_1$ et $\phi_{212} = M i_2$

Pour un circuit donné, $\phi = L i$ avec ϕ le flux propre
à l'intensité traversant
le circuit.

On a calculé $\phi_{tot12} = \mu_0 \frac{N i}{2a} a \ln \left(\frac{b+a/2}{b-a/2} \right) = M i$

on en déduit $M = \mu_0 \frac{N}{2a} a \ln \left(\frac{b+a/2}{b-a/2} \right)$

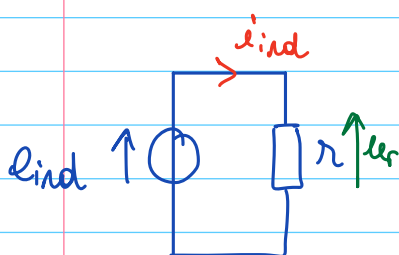
Par ailleurs, on a calculé $\phi_{tore} = \mu_0 \frac{N^2 I}{2a} a \ln \left(\frac{b+a/2}{b-a/2} \right)$
 $= L I$

on en déduit $L = \mu_0 \frac{N^2}{2a} a \ln \left(\frac{b+a/2}{b-a/2} \right)$

On a donc $\frac{L}{M} = N$

On peut donc en déduire que si $N \gg 1$, on peut négliger la mutuelle
devant l'auto-induction.

5) Le tore est équivalent au circuit électrique:



D'après la loi de Lenz, $e_{ind} = - \frac{d\phi}{dt}$

avec ϕ le flux du champ magnétique à travers le
tore.

On a donc $\phi = \phi_{tore} + \phi_{tot12} = L i_{ind} + M i(t)$
car le tore est parcouru par
ind i

Donc $e_{ind} = -L \frac{di_{ind}}{dt} - N \frac{di}{dt}$

On a par ailleurs $e_{ind} = r i_{ind}$

En passant en complexes: $r \underline{i}_{ind} = -L j\omega \underline{i}_{ind} - N j\omega \underline{i}$

$$\underline{i}_{ind} = - \frac{j\omega N}{r + j\omega L} \underline{i}$$

6) $\left| \frac{\underline{i}_{ind}}{\underline{i}} \right| = \frac{\omega M}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} \underset{L\omega \gg r}{\approx} \frac{\omega M}{\omega L} = \frac{M}{L} = \underline{\underline{\frac{1}{N}}}$

7) On a donc si $L\omega \gg r$: $|\underline{i}_{ind}| = \frac{|\underline{i}|}{N}$

On a donc un courant secondaire i_{ci} ou courant primaire et le nombre de spires.

Ce dispositif est pratique pour mesurer des grands courants car le courant qu'on mesure est i_{ind} , et le courant qu'on souhaite mesurer divisé par N : cela permet d'utiliser des outils de mesures classiques.

Exercice 3 - Flocculation d'une suspension colloïdale

1) Le rayon d'une particule colloïdale est de 10^{-8} m à 10^{-6} m , ce qui est très grand devant le rayon d'un ion ($\sim$ de l'ordre de celui d'un atome) à 10^{-10} m . On peut donc considérer les ions comme ponctuels.

💡 Pour justifier qu'on néglige quelque chose (ici l'extension spatiale des ions), il faut toujours faire une comparaison pour montrer devant quoi on peut négliger cette grandeur.

$$2) \text{ On a } f(r) = +ze N_+(r) - ze N_-(r) = ze N_0 \left(e^{-\frac{ze V(r)}{k_B T}} - e^{\frac{ze V(r)}{k_B T}} \right)$$

d'énoncé donne $|ze V(r)| \ll k_B T$ 💡 Dès qu'il y a un $\ll$ ou $\gg$ dans un énoncé, il y a TRÈS souvent un DL à faire.

$$\text{On a donc } e^{\pm \frac{ze V(r)}{k_B T}} \approx 1 \pm \frac{ze V(r)}{k_B T}$$

$$\text{or } f(r) = ze N_0 \left(1 - \frac{ze V(r)}{k_B T} - \left(1 + \frac{ze V(r)}{k_B T} \right) \right) = - \frac{2 z^2 e^2 N_0}{k_B T} V(r)$$

$$3) \text{ On a la loi de Poisson: } \Delta V = - \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{Donc ici } \frac{1}{r} \frac{d^2(rV)}{dr^2} = + \frac{2 z^2 e^2 N_0}{\epsilon_0 k_B T} V(r).$$

$$\text{ie } \frac{d^2(rV)}{dr^2} - \frac{2 z^2 e^2 N_0}{\epsilon_0 k_B T} rV = 0$$

$$\text{En posant } u = rV, \text{ on a } \frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{u}{\delta^2} = 0 \quad \text{et } \delta = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{2 z^2 e^2 N_0}} \quad \text{💡 On reconnaît une ED de même type que l'exercice de l'ailette (T3)}$$

$$\text{On a le polynôme caractéristique: } u^2 - \frac{1}{\delta^2} = 0 \text{ ie } u = \pm \frac{1}{\delta}$$

$$\text{On a donc } u(r) = A e^{-r/\delta} + B e^{+r/\delta}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc } V(r) = \frac{A}{r} e^{-r/\delta} + \frac{B}{r} e^{+r/\delta}$$

En choisissant le potentiel nul à l'infini, on a $B = 0$

$$\text{On a donc } \boxed{V(r) = \frac{A}{r} e^{-r/\delta}}$$

4) On a $\vec{E} = - \text{grad } V = - \frac{dV}{dr} \vec{u}_r$

Donc $E(r) = - \left(-\frac{A}{r^2} e^{-r/\delta} + -\frac{1}{\delta} \frac{A}{r} e^{-r/\delta} \right)$

$$E(r) = \frac{A}{r^2} \left(1 + \frac{r}{\delta} \right) e^{-r/\delta}$$

Appliquons le théorème de Gauss sur la particule colloïdale (sphère de centre O et de rayon R) :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\frac{A}{R^2} \left(1 + \frac{R}{\delta} \right) e^{-R/\delta} \times 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Donc $A = K = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \left(1 + \frac{R}{\delta} \right)} e^{R/\delta}$

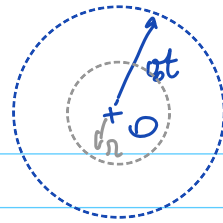
Au final $E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{1 + r/\delta}{1 + R/\delta} e^{(R-r)/\delta}$

5) Plus on ajoute d'ions, plus N_0 augmente, plus δ diminue.

Autrement dit, plus le champ électrique auquel est soumis le colloïde décroît rapidement (dans $e^{-r/\delta}$).

Ainsi plus on ajoute d'ions, moins le champ est autour du colloïde en étalé : les autres colloïdes seront donc moins facilement repoussés, ce qui est favorable à la floculation.

Exercice 4 - Sphere radiactive



1) si $r > r_0 t$, $Q(r, t) = Q_0$

si $r < r_0 t$, $Q(r, t) = Q_0 - q$

où q est la charge entre r et $r_0 t$, donc la charge émise depuis $t=0$ mais la charge toujours dans la sphere de rayon r , se émette depuis $\frac{r}{v_0}$.

$$q = -e\alpha t + e\alpha \frac{r}{v_0}$$

Donc

$Q(r, t) = \begin{cases} Q_0 & \text{si } r > r_0 t \\ Q_0 + e\alpha t - e\alpha \frac{r}{v_0} & \text{si } r < r_0 t \end{cases}$
--

2) Pour $r > r_0 t$, $\vec{j}' = \vec{0}$ et $\rho = 0$

Pour $r < r_0 t$, considérons la sphere de rayon r , on a

$$I = \iint \vec{j}(r, t) \cdot d\vec{S}' = \iint j(r, t) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r = j(r, t) 4\pi r^2$$

↑
j ne dépend que de r fixé sur S

Pas ailleurs $I = \frac{\partial Q}{\partial t}$ où ∂Q est la charge sortant de la sphere,

on a donc $I = - \frac{\partial Q(r, t)}{\partial t}$

On a donc $j(r, t) 4\pi r^2 = - \frac{\partial Q}{\partial t} = -e\alpha$

Donc $j(r, t) = - \frac{e\alpha}{4\pi r^2}$ d'où $\vec{j}'(r, t) = - \frac{e\alpha}{4\pi r^2} \vec{u}_r$

Enfin, $\vec{j}'(r, t) = \rho(r, t) v_0 \vec{u}_r$

Donc $\rho(r, t) = - \frac{e\alpha}{4\pi r^2 v_0}$

3) Tous les plans contenant $\vec{r}$ et $\vec{u}_r$ sont plans de symétrie pour les distributions de charge et de courant.

Donc $\vec{E}'$ est porté par $\vec{u}_r$

et $\vec{B}$ étant perpendiculaire à tous ces plans, on a $\vec{B}' = \vec{0}$.

On a par ailleurs invariance des distributions par rotations autour de O
Donc

$$\vec{E}'(r,t) = E(r,t) \vec{u}_r$$

On applique le théorème de Gauss à une sphère de centre O et de rayon r :

$$\oint_S \vec{E}'(r,t) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_S}{\epsilon_0}$$

On a $\oint_S \vec{E}'(r,t) \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r,t)$

or $Q_S = Q(r,t)$

Donc $E(r,t) = \frac{Q(r,t)}{\epsilon_0 4\pi r^2}$

4) $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$?

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{r^2} \times \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{Q(r,t)}{\epsilon_0 4\pi} \right) = \frac{1}{\epsilon_0 4\pi r^2} \times \left(-\frac{e\alpha}{r_0} \right) = -\frac{\rho(r,t)}{\epsilon_0}$$

sin(θ)
sin(θ)cos(θ) ✓

• $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ✓

• $\text{div } \vec{B} = \text{div } (\vec{0}) = 0$ ✓

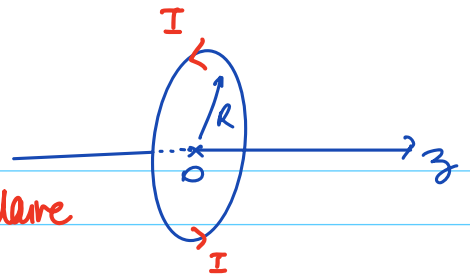
• $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{0} = \vec{0}$

et $\mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \left(-\frac{e\alpha}{4\pi r^2} \vec{u}_r + \underbrace{\frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial Q}{\partial t}}_{= e\alpha} \vec{u}_r \right)$

car r est fixe donc $\vec{u}_r$ aussi

$= \vec{0} \quad \Downarrow$

Exercice 5 - Calcul de $\vec{B}$ créé par une spire circulaire



1) a) $\forall n \in (Oz)$, tous les plans contenant $\vec{On}$ sont plans d'antisymétrie de la distribution de courant.

$$\text{Donc } \vec{B}(n) = B(n) \vec{u}_z$$

Sur l'axe, $r=0$ et θ non défini, donc $B(n) = B(z)$

$$\text{Ainsi } \vec{B}(n) = B_0(z) \vec{u}_z$$

b) le plan (Oxy) est plan de symétrie pour la distribution de courant.

C'est donc un plan d'antisymétrie pour $\vec{B}$. Si $\vec{B} \perp (Oxy)$, donc

$$\vec{B}_\perp(n) = \vec{B}_\perp(n') \quad \text{si } n \text{ et } n' \text{ sym / } (Oxy)$$

ainsi $B(z) = B(-z)$ B est donc paire.

2) a) Soit $n \notin (Oz)$. Le plan $(n, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan d'antisymétrie de la distribution, donc plan de symétrie pour $\vec{B}$.

$$\text{Donc } \vec{B} \in (n, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$$

$$\text{on en déduit que } \vec{B}(n) = B_r(n) \vec{u}_r + B_z(n) \vec{u}_z$$

Par ailleurs, la distribution est invariante par rotation autour de (Oz)

$$\text{Donc } B(n) = B(r, z)$$

$$b) \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\left(\text{il manque dans le sujet en cylindriques} \right)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r B_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$r \frac{1}{r} \frac{\partial(r B_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

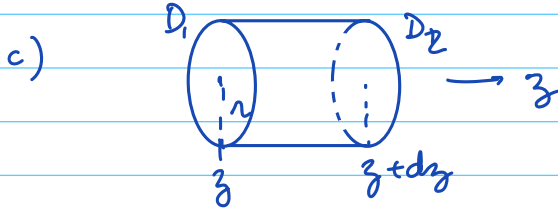
si $r \ll R$, on peut considérer $B_z(r, z) \simeq B_0(z)$

$$\frac{\partial(r B_r)}{\partial r} = -r \frac{dB_0}{dz} \rightarrow \text{dér. de } r$$

$$r B_r(r, z) = -\frac{1}{2} r^2 \frac{dB_0}{dz} + \text{cte}(z)$$

$\underset{=0}{\text{par éval. en } r=0}$

$$r \quad B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_0}{dz}$$



$$\begin{aligned} \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} &= \iint_{D_1} (B_r \vec{u}_r + B_0(z) \vec{u}_z) \cdot dS (-\vec{u}_z) \\ &\quad + \iint_{D_2} (B_r \vec{u}_r + B_0(z+dz) \vec{u}_z) \cdot dS \vec{u}_z \\ &\quad + \iint_{D_3} (B_r \vec{u}_r + B_0(z+dz) \vec{u}_z) \cdot dS \vec{u}_z \\ &= B_0(z+dz) \pi r^2 - B_0(z) \pi r^2 + B_r(r, z) 2\pi r dz \\ &= \pi r^2 \frac{dB_0}{dz} dz + B_r(r, z) 2\pi r dz \end{aligned}$$

$$r \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \text{ donc } \pi r^2 \frac{dB_0}{dz} dz + B_r(r, z) 2\pi r dz = 0$$

$$r \quad B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_0}{dz} \quad \text{ii}$$

① pas
nécessaire